1 (1) $6^3=216$（通り）

(2) $a<b<c$ となるのは ${}_6C_3=20$（通り）で，その確率は $\dfrac{20}{216}=\dfrac{5}{54}$

(3) $a+b+c$ が奇数となるのは，a，b，c がすべて奇数か，1つが奇数，2つが偶数の場合である．

ゆえに，その確率は $\dfrac{3^3+{}_3C_1\cdot 3^3}{6^3}=\dfrac{27+81}{216}=\dfrac{1}{2}$

また，$a+b+c$ が偶数となるのは，奇数となる場合の余事象であるから，その確率は

$1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

(4) $a+b+c=6$ となる a，b，c の組は $(1,\ 1,\ 4)$，$(1,\ 2,\ 3)$，$(2,\ 2,\ 2)$

ゆえに，その確率は $\dfrac{3+{}_3P_3+1}{6^3}=\dfrac{3+6+1}{216}=\dfrac{5}{108}$

また，$a+b+c=5$ となる a，b，c の組は $(1,\ 1,\ 3)$，$(1,\ 2,\ 2)$

$a+b+c=4$ となる a，b，c の組は $(1,\ 1,\ 2)$

$a+b+c=3$ となる a，b，c の組は $(1,\ 1,\ 1)$

よって，$a+b+c\leqq 6$ となる確率は $\dfrac{10}{216}+\dfrac{3+3}{216}+\dfrac{3}{216}+\dfrac{1}{216}=\dfrac{20}{216}=\dfrac{5}{54}$

(5) $\displaystyle\int_0^1(ax^2+bx+c)dx=\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right]_0^1=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c$

ゆえに $\dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{2}+c=6$ から　$2a+3b+6c=36$ ……①

①から　$2a=3(12-b-2c)$　　よって，a は3の倍数．

また，①から　$3b=2(18-a-3c)$　　よって，b は偶数．

したがって，①を満たす a，b，c を求めると

$(a,\ b,\ c)=(6,\ 6,\ 1)$，$(6,\ 4,\ 2)$，$(6,\ 2,\ 3)$，
$(3,\ 6,\ 2)$，$(3,\ 4,\ 3)$，$(3,\ 2,\ 4)$

ゆえに，求める確率は $\dfrac{6}{216}=\dfrac{1}{36}$

2 (1) $s(a,\ n)=\dfrac{n}{2}\{2a+(n-1)\cdot 1\}=\dfrac{n({}^{ア}2a+n-{}^{イ}1)}{{}^{ウ}2}$

(2) $s(-8,\ n)=\dfrac{n(-16+n-1)}{2}=100$ から　$(n-25)(n+8)=0$　　$n>0$ から　$n={}^{エ}25$

$s(a,\ 25)=\dfrac{25(2a+25-1)}{2}=1000$ から　$25(2a+24)=2000$　　よって　$a={}^{オ}28$

(3) $s(a,\ n)=\dfrac{n(2a+n-1)}{2}=10$ から　$n(2a+n-1)=20$

n が奇数のとき $2a+n-1$ は偶数，n が偶数のとき $2a+n-1$ は奇数．

$20=2^2\cdot 5$ であるから，条件に適するのは

$(n,\ 2a+n-1)=(1,\ 2^2\cdot 5),\ (2^2,\ 5),\ (5,\ 2^2),\ (2^2\cdot 5,\ 1)$ の ${}^{カ}4$ 組

(4) $s(a,\ n)=100$ から　$n(2a+n-1)=200$

$2a=\dfrac{200}{n}-n+1>0$ から　$n^2-n-200<0$

よって　$0<n<\dfrac{1+\sqrt{801}}{2}=14.6\cdots\cdots$　　また　$200=2^3\cdot 5^2$

ゆえに，題意に適するのは　$(n,\ 2a+n-1)=(1,\ 2^3\cdot 5^2),\ (5,\ 2^3\cdot 5),\ (2^3,\ 5^2)$ の ${}^{キ}3$ 組

(5) $s(a,\ n)=1000$ から　$n(2a+n-1)=2000$　　また　$2000=2^4\cdot 5^3$

ゆえに，条件に適するのは

$(n,\ 2a+n-1)=(1,\ 2^4\cdot 5^3),\ (5,\ 2^4\cdot 5^2),\ (2^4,\ 5^3),\ (5^2,\ 2^4\cdot 5),\ (2^4\cdot 5,\ 5^2),\ (5^3,\ 2^4),\ (2^4\cdot 5^2,5),$
$(2^4\cdot 5^3,\ 1)$　の ${}^{ク}8$ 組

3 (1) $x^2+y^2-2x+\dfrac{16}{25}=0$ ……① とする。

$t=\dfrac{y}{x}$ から　　$y=tx$

これを①に代入すると　　$x^2+(tx)^2-2x+\dfrac{16}{25}=0$

整理して　　$(t^2+1)x^2-2x+\dfrac{16}{25}=0$　……②

x は実数であるから，②の判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=(-1)^2-(t^2+1)\cdot\dfrac{16}{25}\geqq 0$　　　　よって　　$t^2\leqq\dfrac{9}{16}$

したがって　　${}^{ア}-\dfrac{3}{4}\leqq t\leqq\dfrac{3}{4}$　……③

(2) $1+t>0$ であるから，相加平均・相乗平均の関係より

$1+t+\dfrac{3}{1+t}\geqq 2\sqrt{(1+t)\cdot\dfrac{3}{1+t}}={}^{イ}2\sqrt{3}$

等号が成り立つのは，$1+t=\dfrac{3}{1+t}$ のときである。

これを③の範囲で解くと　　$t={}^{ウ}\sqrt{3}-1$

(3) $z=\dfrac{x^2+xy}{4x^2+2xy+y^2}=\dfrac{x^2+x\cdot tx}{4x^2+2x\cdot tx+(tx)^2}=\dfrac{(1+t)x^2}{(4+2t+t^2)x^2}={}^{エ}\dfrac{1+t}{4+2t+t^2}$

更に変形すると　　$z=\dfrac{1}{\dfrac{4+2t+t^2}{1+t}}=\dfrac{1}{1+t+\dfrac{3}{1+t}}$

$1+t+\dfrac{3}{1+t}$ は，(2)より $t=\sqrt{3}-1$ のとき最小値 $2\sqrt{3}$ をとるから，z は

$t={}^{オ}\sqrt{3}-1$ のとき最大値 $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}={}^{カ}\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ をとる。

α，β は $t=\sqrt{3}-1$ のときの②の解であるから，解と係数の関係により

$\alpha+\beta=\dfrac{2}{(\sqrt{3}-1)^2+1}=\dfrac{2}{5-2\sqrt{3}}=\dfrac{2(5+2\sqrt{3})}{(5-2\sqrt{3})(5+2\sqrt{3})}={}^{キ}\dfrac{10+4\sqrt{3}}{13}$

1 a，b に対する α と β の値は次の表のようになる。

α の値

a \ b	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
2	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
3	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
4	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
5	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
6	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

β の値

a \ b	1	2	3	4	5	6
1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
3	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
4	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
5	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
6	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

(1) 表から，$\alpha>0$ となる $(a,\ b)$ の組は　ア10 通り

$\alpha>0$ かつ $\beta>0$ となる $(a,\ b)$ の組は　イ4 通り

(2) 表から，α が有理数となる $(a,\ b)$ の組は　ウ24 通り

β が有理数となる $(a,\ b)$ の組は　エ24 通り

α，β がともに有理数となる $(a,\ b)$ の組は　オ20 通り

(3) 解と係数の関係から　$\alpha+\beta=-p$，$\alpha\beta=q$

よって　$p=-(\alpha+\beta)$，$q=\alpha\beta$

p，q がともに有理数となるのは，次の [1] ～ [3] のいずれかの場合であり，これらは互いに排反である。

[1] α，β がともに有理数となる。

[2] $\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\beta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ となる。　　[3] $\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ となる。

[1] を満たす $(a,\ b)$ の組は，(2) から　20 通り

[2], [3] を満たす $(a,\ b)$ の組は，表から　[2]　1 通り　　[3]　3 通り

したがって，p，q がともに有理数となる $(a,\ b)$ の組は

$$20+1+3={}^{カ}24\ (通り)$$

2 (1) $a_1=\frac{2}{5}$，$b_1=\frac{1}{5}$　2 ステップ後 A にあるのは 2 回とも A にとどまるか，1 回目他の頂点に移り，2 回目 A に戻るかであるから $a_2=\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(1-\frac{2}{5}\right)\times\frac{1}{5}=\frac{7}{25}$

2 ステップ後に B にあるのは，A → A → B　または　A → B → B

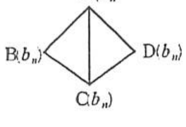
または　A → CorD → B と移る場合であるから

$$b_2=\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}+\left(\frac{1}{5}\right)^2\times 2=\frac{6}{25}$$

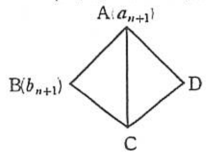
別解　$b_2=\frac{1}{3}(1-a_2)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{7}{25}\right)=\frac{6}{25}$

(2)

n ステップ後



$(n+1)$ ステップ後



図形の対称性から n ステップ後に P が C，D にある確率も共に b_n であるから

$$a_{n+1}=\frac{2}{5}a_n+\frac{3}{5}b_n\ \cdots\cdots ①,\ b_{n+1}=\frac{1}{5}a_n+\frac{4}{5}b_n\ \cdots\cdots ②$$

(3) ① から $b_n=\frac{5}{3}a_{n+1}-\frac{2}{3}a_n$

よって　② から $\frac{5}{3}a_{n+2}-\frac{2}{3}a_{n+1}=\frac{1}{5}a_n+\frac{4}{5}\left(\frac{5}{3}a_{n+1}-\frac{2}{3}a_n\right)$

ゆえに　$a_{n+2}=\frac{6}{5}a_{n+1}-\frac{1}{5}a_n$

$a_{n+2}-a_{n+1}=\frac{1}{5}(a_{n+1}-a_n)$，$a_1=\frac{2}{5}$，$a_0=1$ から

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{5^n}(a_1-a_0)=\frac{1}{5^n}\left(\frac{2}{5}-1\right)=-\frac{3}{5^{n+1}}\ \cdots\cdots ③$$

一方 $a_{n+2}-\frac{1}{5}a_{n+1}=a_{n+1}-\frac{1}{5}a_n$，

$a_1=\frac{2}{5}$，$a_0=1$ から $a_{n+1}-\frac{1}{5}a_n=a_1-\frac{1}{5}a_0=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}=\frac{1}{5}\ \cdots\cdots ④$

④－③ から $\frac{4}{5}a_n=\frac{1}{5}+\frac{3}{5^{n+1}}$　ゆえに　$a_n=\frac{1}{4}\left(1+\frac{3}{5^n}\right)$

よって　$b_n=\frac{5}{3}a_{n+1}-\frac{2}{3}a_n=\frac{5}{12}\left(1+\frac{3}{5^{n+1}}\right)-\frac{2}{12}\left(1+\frac{3}{5^n}\right)=\frac{1}{12}\left(3-\frac{3}{5^n}\right)$

$$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5^n}\right)$$

3 (1) $s=3^x>0$

また　$f(x)=3^{3x}-6\times 3^{2x}-33\times 3^x=(3^x)^3-6\times(3^x)^2-33\times 3^x$

よって　$F(s)=s^3-6s^2-33s$

(2) $F(s)=0$ とすると　$s^3-6s^2-33s=0$

よって　$s(s^2-6s-33)=0$

これを解くと　$s=0,\ 3\pm\sqrt{42}$

$s>0$ であるから　$s=3+\sqrt{42}$

ゆえに，$f(x)=0$ のとき　$3^x=3+\sqrt{42}$

したがって　$x=\log_3(3+\sqrt{42})$

(3) $3^x>0$，$3^{-x}>0$ であるから，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$t=3^x+3^{-x}\geqq 2\sqrt{3^x\cdot 3^{-x}}=2$$

また　$g(x)=f(x)+f(-x)+204$

$$=3^{3x}-6\times 3^{2x}-33\times 3^x+3^{-3x}-6\times 3^{-2x}-33\times 3^{-x}+204$$

$$=\{(3^x)^3+(3^{-x})^3\}-6\{(3^x)^2+(3^{-x})^2\}-33(3^x+3^{-x})+204$$

$$=\{(3^x+3^{-x})^3-3\cdot 3^x\cdot 3^{-x}(3^x+3^{-x})\}$$

$$-6\{(3^x+3^{-x})^2-2\cdot 3^x\cdot 3^{-x}\}-33(3^x+3^{-x})+204$$

よって　$G(t)=(t^3-3t)-6(t^2-2)-33t+204=t^3-6t^2-36t+216$

(4) $G(t)=0$ とすると　$t^3-6t^2-36t+216=0$

よって　$(t+6)(t-6)^2=0$

これを解くと　$t=\pm 6$

$t\geqq 2$ であるから　$t=6$

ゆえに，$g(x)=0$ のとき　$3^x+3^{-x}=6$

両辺に 3^x を掛けて整理すると　$(3^x)^2-6\cdot 3^x+1=0$

3^x について解くと　$3^x=3\pm 2\sqrt{2}$

したがって　$x=\log_3(3\pm 2\sqrt{2})$

1 (1) $a_n \leqq m$ となる最大の n の値を b_m $(m=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ とする.

$$b_m=\sum_{k=1}^{m}(3k-1)=3\cdot\frac{1}{2}m(m+1)-m=\frac{1}{2}m(3m+1)$$

よって　$b_2=7,\ b_3=15,\ b_4=26$

ゆえに　$a_{10}=3,\ a_{20}=4$

(2) $b_9=126,\ b_{10}=155$ であるから　$127 \leqq n \leqq 155$

(3) $b_k=\dfrac{1}{2}k(3k+1)$

(4) $b_m \leqq 610$ とすると　$(m-20)(3m+61) \leqq 0$

$m=20$ のとき $b_m=610$ から　$a_{610}=20$

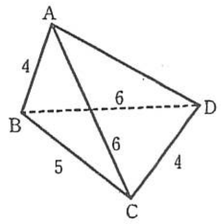
$a_n=20$ となる n の個数は　$3\cdot20-1=59$ (個)

a_{610} はそのうちの最後の 59 番目の項である.

(5) 求める和は k が $3k-1$ 個あるから

$$\sum_{k=1}^{20}k(3k-1)=3\cdot\frac{1}{6}\cdot20\cdot21\cdot41-\frac{1}{2}\cdot20\cdot21=8400$$

2 (1) △ABCにおいて，余弦定理により



$$\cos\angle ABC=\frac{4^2+5^2-6^2}{2\cdot4\cdot5}={}^{ア}\frac{1}{8}$$

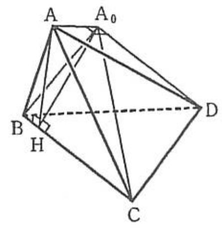
よって　$\sin\angle ABC=\sqrt{1-\cos^2\angle ABC}$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$$

したがって，△ABCの面積は

$$\frac{1}{2}BA\cdot BC\sin\angle ABC=\frac{1}{2}\cdot4\cdot5\cdot\frac{3\sqrt{7}}{8}={}^{イ}\frac{15\sqrt{7}}{4}$$

(2) 平面 BCD 上に $A_0B=4,\ A_0C=6$ となるように，直線 BC に関して点 D と同じ側に点 A_0 をとる。



点 A_0 から直線 BC に下ろした垂線を A_0H とすると

$AH \perp BC$

よって，平面 AA_0H は直線 BC に垂直であり，

$\triangle A_0BC \equiv \triangle DCB$ より $BC /\!/ A_0D$ であるから，

平面 AA_0H は直線 A_0D に垂直である。

したがって，$A_0D \perp A_0A$ であるから

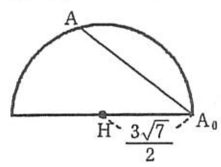
$$AD=\sqrt{A_0D^2+A_0A^2}\quad\cdots\cdots①$$

$\triangle A_0BC \equiv \triangle DCB$ より，四角形 A_0BCD は等脚台形であり，

$$BH=A_0B\cos\angle A_0BC=4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$

であるから　$A_0D=5-2\cdot\dfrac{1}{2}=4$　……②

また，$A_0H=AH$ であるから，点 A は，H を中心とする半径 A_0H の半円上にある。



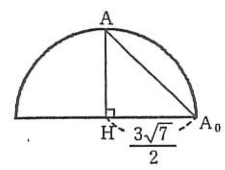
$$A_0H=A_0B\sin\angle A_0BC=4\cdot\frac{3\sqrt{7}}{8}=\frac{3\sqrt{7}}{2}$$

であるから　$0<A_0A<3\sqrt{7}$　……③

①，②，③ より　$4<AD<\sqrt{4^2+(3\sqrt{7})^2}$

したがって　${}^{ウ}4<AD<{}^{エ}\sqrt{79}$

(3) 四面体 ABCD の体積が最大となるのは，平面 BCD と平面 ABC が垂直となるときである。



このとき，$A_0A=\dfrac{3\sqrt{7}}{2}\cdot\sqrt{2}=\dfrac{3\sqrt{14}}{2}$ であるから，

①，② より

$$AD=\sqrt{4^2+\left(\frac{3\sqrt{14}}{2}\right)^2}={}^{オ}\frac{\sqrt{190}}{2}$$

また，その体積は

$$\frac{1}{3}\triangle ABC\cdot A_0H=\frac{1}{3}\cdot\frac{15\sqrt{7}}{4}\cdot\frac{3\sqrt{7}}{2}={}^{カ}\frac{105}{8}$$

3 (1) 底を 2 に変換すると

$$(\log_2x)^2+2\cdot\frac{\log_2x}{\log_24}+2\log_2x+\frac{\log_2y}{\log_2x}-\log_2x^{-1}-2\cdot\frac{\log_22}{\log_2x}+\frac{\log_22}{\log_2\frac{1}{2}}-2=0$$

よって　$t^2+2\cdot\dfrac{t}{2}+2t+\dfrac{s}{t}+t-2\cdot\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{-1}-2=0$

したがって　$s=-t^3-4t^2+3t+2$

(2) $y=\dfrac{1}{65536}=2^{-16}$ であるから　$s=\log_2 2^{-16}=-16$

(1) より　$-16=-t^3-4t^2+3t+2$

$t^3+4t^2-3t-18=0$

$(t-2)(t+3)^2=0$

$x>1$ より，$t=\log_2x>0$ であるから　$t=2$

よって　$\log_2x=2$　　したがって　$x=4$

(3) $s=-t^3-4t^2+3t+2$　$(t>0)$

$$\frac{ds}{dt}=-3t^2-8t+3=-(t+3)(3t-1)$$

s の増減表は右のようになる。

t	0	…	$\frac{1}{3}$	…
$\frac{ds}{dt}$		+	0	−
s		↗	$\frac{68}{27}$	↘

よって，s は $t=\dfrac{1}{3}$ のとき最大値 $\dfrac{68}{27}$ をとる。

このとき

$\log_2x=\dfrac{1}{3}$ から　$x=2^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}$，　$\dfrac{68}{27}=\log_2y$ から　$y=2^{\frac{68}{27}}$

$s=\log_2y$ は，y が増加すると s も増加するから，s が最大値をとるとき，y も最大値をとる。

したがって，y は $x=\sqrt[3]{2}$ のとき最大値 $2^{\frac{68}{27}}$ をとる。

$\boxed{1}$ (1) $f(10)=\left[\dfrac{10}{3}+5\right]=\left[8+\dfrac{1}{3}\right]={}^{\text{ア}}8$,　$f(100)=\left[\dfrac{100}{3}+5\right]=\left[38+\dfrac{1}{3}\right]={}^{\text{イ}}38$

$f(n)=10$ から　$10\leqq\dfrac{1}{3}n+5<11$

すなわち　$5\leqq\dfrac{1}{3}n<6$　　よって　$15\leqq n<18$

したがって，$f(n)=10$ を満たす最小の自然数 n は　$n={}^{\text{ウ}}15$

(2) $4x^2-20x+9<0$ から　$(2x-1)(2x-9)<0$　　よって　${}^{\text{エ}}\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{9}{2}$

$4[x]^2-20[x]+9<0$ から　$\dfrac{1}{2}<[x]<\dfrac{9}{2}$　　よって　$[x]=1,\ 2,\ 3,\ 4$

これを満たす x の値の範囲は　${}^{\text{オ}}1\leqq x<5$

(3) $[x^2-2x+2]=1$ から　$1\leqq x^2-2x+2<2$

すなわち　$1\leqq x^2-2x+2$ ……①　かつ　$x^2-2x+2<2$ ……②

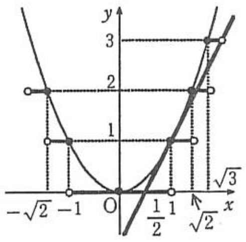
①から　$(x-1)^2\geqq0$　　よって，解は　すべての実数

②から　$x(x-2)<0$　　よって，解は　$0<x<2$

①，②の解の共通範囲を求めて　${}^{\text{カ}}0<x<2$

(4) $y=[x^2]$，$y=2x-1$ から y を消去して　$[x^2]=2x-1$ ……(*)

$x^2\geqq0$ より $[x^2]\geqq0$ であるから　$2x-1\geqq0$　　よって　$x\geqq\dfrac{1}{2}$



[1] $\dfrac{1}{2}\leqq x<1$ のとき

$\dfrac{1}{4}\leqq x^2<1$ であるから　$[x^2]=0$

(*)は　$0=2x-1$

よって　$x=\dfrac{1}{2}$　　このとき　$y=0$

[2] $1\leqq x<\sqrt{2}$ のとき

$1\leqq x^2<2$ であるから　$[x^2]=1$

(*)は　$1=2x-1$　　よって　$x=1$　　このとき　$y=1$

[3] $\sqrt{2}\leqq x<\sqrt{3}$ のとき

$2\leqq x^2<3$ であるから　$[x^2]=2$

(*)は　$2=2x-1$　　よって　$x=\dfrac{3}{2}$　　このとき　$y=2$

[4] $\sqrt{3}\leqq x$ のとき　共有点はない。

以上から，共有点は3個あり，x 座標の小さいものから順に

$${}^{\text{キ}}\left(\frac{1}{2},\ 0\right),\ {}^{\text{ク}}(1,\ 1),\ {}^{\text{ケ}}\left(\frac{3}{2},\ 2\right)$$

$\boxed{2}$ (1) $3^3=27=17\times1+10$　　よって　$r(3)=10$

$3^5=243=17\times14+5$　　よって　$r(5)=5$

3^n を17で割った商を $q(n)$ とすると

$3^{m+n}=3^m\times3^n=\{17q(m)+r(m)\}\{17q(n)+r(n)\}$

$=17^2q(m)q(n)+17\{q(m)r(n)+r(m)q(n)\}+r(m)r(n)$

$=17\{17q(m)q(n)+q(m)r(n)+r(m)q(n)\}+r(m)r(n)$

したがって，$r(m+n)$ は $r(m)r(n)$ を17で割った余りに等しい。……①

$3^8=3^{3+5}$ で　$r(3)r(5)=10\times5=50=17\times2+16$

よって　$r(8)=16$　　同様に　$r(11)=7$

また，$r(16)=1$ であるから，①より

$r(n+16l)=r(n)$　(l は正の整数)

が成り立つ。

$3^{25}=3^{16+9}$ であるから　$r(25)=r(9)=14$

$3^{2004}=3^{16\times125+4}$ であるから　$r(2004)=r(4)=13$

(2) $r(1)$ から $r(16)$ までを書き出すと，次のようになる。

$r(1)=3$，$r(2)=9$，$r(3)=10$，$r(4)=13$，

$r(5)=5$，$r(6)=15$，$r(7)=11$，$r(8)=16$，

$r(9)=14$，$r(10)=8$，$r(11)=7$，$r(12)=4$，

$r(13)=12$，$r(14)=2$，$r(15)=6$，$r(16)=1$

$r(n+k)$ は $r(n)r(k)$ を17で割った余りに等しいから

$r(n+k)=r(n)\iff r(k)=1$

よって，求める最小の k は　16

(3) 3^0 を17で割った余りを $r(0)$ とすると　$r(0)=1$

また　$r(17)=3$，$r(18)=9$，$r(19)=10$，$r(20)=13$

3^a+3^b が17で割り切れるための条件は，$r(a)+r(b)$ が17で割り切れることである。

このような $(a,\ b)$ [ただし，$0\leqq b<a\leqq20$] の組は

$(8,\ 0)$，$(9,\ 1)$，$(10,\ 2)$，$(11,\ 3)$，$(12,\ 4)$，$(13,\ 5)$，$(14,\ 6)$，$(15,\ 7)$，$(16,\ 8)$，
$(17,\ 9)$，$(18,\ 10)$，$(19,\ 11)$，$(20,\ 12)$

の13組あり，この中で a，b がともに素数である組は

$(19,\ 11)$，$(13,\ 5)$，$(11,\ 3)$

$\boxed{3}$ (1) $x^2+y^2-16x-22y+169=0$ ……①，$y=mx$ ……②　とする。

②を①に代入すると　$x^2+m^2x^2-16x-22mx+169=0$

整理すると　$(m^2+1)x^2-2(11m+8)x+169=0$ ……③

③の判別式を D とすると　$\dfrac{D}{4}=(11m+8)^2-(m^2+1)\cdot169=-48m^2+176m-105$

①と②が異なる2点で交わるとき，$D>0$ であるから　$-48m^2+176m-105>0$

よって　$48m^2-176m+105<0$

ゆえに　$(4m-3)(12m-35)<0$

したがって　$\dfrac{3}{4}<m<\dfrac{35}{12}$ ……④

(2) ①を変形すると $(x-8)^2+(y-11)^2=4^2$ となるから，円 C は第1象限にある。

ゆえに　$\alpha>0$，$\beta>0$

このとき　$\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}=\sqrt{\alpha^2+m^2\alpha^2}\sqrt{\beta^2+m^2\beta^2}=|\alpha||\beta|(m^2+1)=\alpha\beta(m^2+1)$

α，β は③の2つの解であるから，解と係数の関係により　$\alpha\beta=\dfrac{169}{m^2+1}$

したがって　$\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}=\dfrac{169}{m^2+1}\cdot(m^2+1)=169$　(一定)

(3) 円の中心を $\mathrm{D}(10,\ y)$ とする。

$\mathrm{AD}=\mathrm{BD}$ であるから　$\mathrm{AD}^2=\mathrm{BD}^2$

よって　$(10-\alpha)^2+(y-m\alpha)^2=(10-\beta)^2+(y-m\beta)^2$

ゆえに　$(m^2+1)(\alpha^2-\beta^2)-(2my+20)(\alpha-\beta)=0$

すなわち　$(\alpha-\beta)\{(m^2+1)(\alpha+\beta)-2my-20\}=0$

$\alpha\neq\beta$ であるから　$(m^2+1)(\alpha+\beta)-2my-20=0$ ……⑤

③において，解と係数の関係により　$\alpha+\beta=\dfrac{2(11m+8)}{m^2+1}$

これを⑤に代入して　$(m^2+1)\cdot\dfrac{2(11m+8)}{m^2+1}-2my-20=0$

したがって　$y=11-\dfrac{2}{m}$

④のとき　$11-2\cdot\dfrac{4}{3}<11-\dfrac{2}{m}<11-2\cdot\dfrac{12}{35}$

すなわち　$\dfrac{25}{3}<11-\dfrac{2}{m}<\dfrac{361}{35}$

したがって，中心の y 座標がとりうる値の範囲は　$\dfrac{25}{3}<y<\dfrac{361}{35}$